Übungen zur Vorlesung

Analysis I

WiSe 2021/2022

Bernold Fiedler, Isabelle Schneider

`http://dynamics.mi.fu-berlin.de/lectures/`

Abgabe: Mittwoch, 17.11.2021, 17 Uhr

Aufgabe 9: Seit Beginn des Studiums wohnt Annaliese im zweiten Stock eines Berliner Mietshauses und muss jeden Abend $N = 36$ Stufen erklimmen. Mit jedem Schritt steigt sie ein oder zwei Stufen hinauf. Ihren Eltern versprach sie, jeden Abend eine andere Schrittfolge zu wählen und bis zum Master zu kommen, bevor sie sich dabei wiederholt.

Wie viele verschiedene Schrittfolgen gibt es (für allgemeines N)? Wie lange kann Annaliese studieren, ohne ihr Versprechen zu brechen ($N = 36$)?

Ein „echtes“ Mietshaus hat pro Stockwerk zwei Halbtreppen mit je 9 Stufen. Wieviel Zeit verbleibt Annaliese, ohne über Treppenabsätze „hinwegschweben“ zu müssen?

Aufgabe 10: Betrachte die Abbildung $f : [0, 1] \to [0, 1]$,

$$f(x) = \begin{cases} ax & \text{für } 0 \le x \le \frac{1}{2} \\ a(1-x) & \text{für } \frac{1}{2} \le x \le 1 \end{cases}$$

Für den Parameter a gelte $0 < a \le 2$.

(i) Zeichne für drei selbstgewählte Werte a die Graphen von f und $f^2 = f \circ f$.

(ii) Finde für geeignete Werte a Fixpunkte x_0 von f^2, die keine Fixpunkte von f sind. Wie verhält sich in diesen Fällen die durch $x_{n+1} := f(x_n)$ rekursiv definierte Folge?

(iii) Gib alle a an, die den Fall ii) zulassen.

Freiwilliger Zusatz: Finde Punkte x_0 der minimalen Periode 3.

Aufgabe 11: Betrachte die Fibonacci-Folge (mit anderen Startwerten als in der Vorlesung!):

$$x_0 = 0, \qquad x_1 = 1, \qquad x_{n+1} = x_n + x_{n-1}.$$

Beweise für alle $n \ge 1$:

(i) $x_n^2 \;=\; x_{n+1}x_{n-1} - (-1)^n$,

(ii) $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} x_i^2 = x_n x_{n+1}$.

Aufgabe 12: Finde und beweise eine Formel für die Zeilensummen im folgenden (nicht Pascalschen!) Dreieck:

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 1 & & & & \\
 & & & 3 & & 5 & & & \\
 & & 7 & & 9 & & 11 & & \\
 & 13 & & 15 & & 17 & & 19 & \\
21 & & 23 & & 25 & & 27 & & 29 \\
 & & & & \vdots & & & &
\end{array}$$

Freiwillige Zusatzaufgabe: Im (echten) „Pascalschen“ Dreieck hat jeder Binomialkoeffizient, der nicht am Rand liegt, genau sechs Nachbarn. Zeige, dass das Produkt dieser sechs Nachbarn stets eine Quadratzahl ist.